NOMBRES COMPLEXOS

Cristóbal Sánchez Rubio

Introducció

És habitual trobar a la majoria de textos la introducció als nombres complexos amb l'argument "natural" de resoldre l'equació quadràtica

$$x^2 + 1 = 0,$$

com a pas previ al fet que tota equació de segon grau tingui dues solucions. No obstant, històricament no va anar així, ja que la resolució mitjançant radicals de l'equació polinòmica de segon grau era perfectament coneguda pels algebristes italians del Renaixement. Una equació de segon grau en el camp real té dues solucions, una o cap; situacions que es corresponen des del punt de vista geomètric amb el fet que una circumferència (o una cònica) i una recta es tallin en dos punts, un o cap. Res no exigia haver de resoldre l'equació $x^2 + 1 = 0$.

Més important era buscar una fórmula per a la resolució de l'equació polinòmica de grau tres. Quan aquesta fórmula es descobreix (Tartaglia i Cardano en el segle XVI) apareix la situació següent que és ben sorprenent:

Si l'equació general polinòmica de tercer grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

la transformem en una de la forma

$$x^3 + px + q = 0$$

dividint per a i després fent un canvi de variable del tipus $x = x' - \dfrac{b}{3}$, en resoldre aquesta darrera equació s'arriba a la fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}.$$

Considerem un polinomi de tercer grau amb tres arrels reals conegudes, -2, $1+\sqrt{3}$ i $1-\sqrt{3}$,

$$(x+2)\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)=(x+2)(x^2-2x-3)=x^3-6x-4.$$

Si apliquem la fórmula de resolució a l'equació $x^3-6x-4=0$ prenent els dos signes $+$ s'obté:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}}+\frac{2}{\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}}}=\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}+\frac{2}{\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}}.$$

On són les arrels de l'equació donada si la seva existència és inqüestionable?
En primer lloc ens apareix l'expressió $\sqrt{-1}$ que en principi no té significat. Des d'un punt de vista purament formal podem operar amb el símbol $\sqrt{-1}$ sense preocupar-nos pel seu significat i només fent servir que el seu quadrat és -1.
Com que

$$\left(-1-\sqrt{-1}\right)^3=-1+3\sqrt{-1}-3\left(\sqrt{-1}\right)^2+\left(\sqrt{-1}\right)^3=2+2\sqrt{-1}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}=-1+\sqrt{-1}$$

podem intentar el càlcul de x

$$x=\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}+\frac{2}{\sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}}}=-1+\sqrt{-1}+\frac{2}{-1+\sqrt{-1}}=$$
$$=-1+\sqrt{-1}+2\frac{-1-\sqrt{-1}}{1+1}=-2.$$

Les altres dues arrels apareixen en prendre els altres dos valors de les arrels cúbiques.
Aquesta relació amb nombres com $\sqrt{-1}$ l'existència dels quals era més que qüestionable a l'època (d'aquí el nom d'"imaginari") i que tanmateix servien per a obtenir les solucions reals d'una equació va tardar dos segles a formalitzar-se i fou el problema que d'una manera "natural" exigí el maneig de les arrels quadrades de nombres negatius.[1]

[1] Per a un estudi complet de les fórmules per a la resolució de les equacions de tercer i quart grau vegeu per exemple *Àlgebra moderna* de G.Birkhoff i S. MacLane. Ed. Vicens Vives. Pàgina 121

El punt de vista formal

Podem definir els complexos com el conjunt $\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ amb les operacions:

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$
$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

És fàcil comprovar que és un cos commutatiu.

Per la definició que s'ha donat de $\mathbb{C}$ com a parells ordenats, és important fer notar que dos complexos són iguals si i només si ho són els seus dos components

$$(a,b) = (a',b') \iff a = a' \text{ i } b = b'.$$

Podem destacar-ne els següents elements algebraicament distingits:

- Element neutre de la suma: $(0,0)$.
- Element neutre del producte: $(1,0)$.
- Element oposat de (a,b): $-(a,b) = (-a,-b)$.
- Element invers de (a,b): $\dfrac{1}{(a,b)} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$, definit per a tot parell

diferent de $(0,0)$.

També és senzill comprovar que identificant qualsevol nombre real a amb el parell $(a,0)$, els nombres reals queden "submergits" en el conjunt $\mathbb{C}$. Només cal anul·lar el segon component i comprovar que les operacions definides abans coincideixen amb la suma i el producte ordinaris de nombres reals. D'ara endavant si a és un nombre real utilitzarem indistintament la notació a o el parell $(a,0)$.

Si posem $i = (0,1)$, és immediat comprovar que $i^2 = -1$ i clarament tenim:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + bi$$

que és l'anomenada forma binòmica d'un nombre complex.

És habitual dir-ne part real del primer component del parell (a,b) i del segon, part imaginària.

Els complexos que tenen part real nul·la s'anomenen imaginaris purs. En particular $i = (0,1)$ s'anomena unitat imaginària. Com que $i^2 = -1$, des d'un punt de vista formal podem posar $i = \sqrt{-1}$.

Quan no sigui indispensable d'explicitar les parts real i imaginària d'un complex el designarem simplement z i indicarem respectivament per $\operatorname{Re}(z)$ i $\operatorname{Im}(z)$ les seves parts real i imaginària.

Definició: Donat un complex $z = a + bi$, definim el conjugat de z i el designem per $\bar{z}$, el complex $a - bi$.

Són de comprovació immediata les propietats següents:

$$\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \; (z' \neq 0), \quad \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Interpretació geomètrica. Mòdul i argument d'un nombre complex.

Si representem el parell ordenat (a, b) sobre el pla de la manera usual (el primer component a l'eix horitzontal i el segon al vertical), obtenim, per a cada complex, un punt que anomenem afix del complex. Quan no hi hagi possibilitat de confusió identificarem punt i nombre complex. Del pla així conformat se'n diu pla complex; de l'eix horitzontal se'n sol dir eix real i del vertical, imaginari.

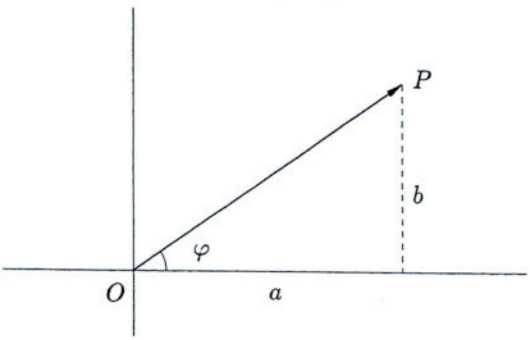

Figura 1

Si tracem el vector amb origen a l'origen O de coordenades i extrem a l'afix P de $z = (a, b)$, i anomenant φ l'angle format per la part positiva de l'eix real i el vector $\overrightarrow{OP}$, tenim les relacions següents:

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\varphi = b/a$$
$$a = \overline{OP}\cos\varphi \qquad b = \overline{OP}\sin\varphi$$

El nombre real positiu que mesura la distància de O a P ($\overline{OP}$) s'anomena mòdul del complex z i es representa per $|z|$. L'angle φ està determinat pel parell $(a, b) \neq (0, 0)$ llevat d'un múltiple de 2π; per això diem que φ és *un argument* de z i ho escriurem $\arg(z)$. Si volem determinar un únic argument per a z, només cal restringir φ a un interval semiobert de longitud 2π que normalment és $[0, 2\pi)$.

Amb aquestes definicions i notacions, les relacions anteriors queden així:

(1) $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

(2) $$a = |z|\cos\varphi, \qquad b = |z|\sin\varphi.$$

Tenint present que la imatge geomètrica de la conjugació és una simetria respecte l'eix real i que $|z|$ és una distància, són esperables les propietats següents la demostració de les quals es proposa com exercici.

Exercici 1: $z\bar{z} = |z|^2$.
Exercici 2: $|z| = 0 \iff z = 0$.
Exercici 3: $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$.
Exercici 4: $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.
Exercici 5: $|\bar{z}| = |z|$.
Exercici 6: $|zz'| = |z||z'|$.
Exercici 7: Si $z' \neq 0$, llavors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
Exercici 8: Si $zz' = 0$, llavors $z = 0$ o bé $z' = 0$. (Aquesta propietat es pot enunciar equivalentment: Si $zz' = 0$ i $z \neq 0$, llavors $z' = 0$.)
Exercici 9: $|z| = 1$ si i només si $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
Exercici 10: Desigualtat triangular: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Quan es compleix la igualtat?

Forma trigonomètrica d'un complex.
Per simplificar la notació posem $r = |z|$, $r' = |z'|$ i siguin $\varphi = \arg(z)$, $\varphi' = \arg(z')$. Per (2), tenim

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{3}$$

Aquesta manera de representar un nombre complex s'anomena forma trigonomètrica i és especialment útil a l'hora de multiplicar dos complexos.
En efecte, siguin els complexos $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. Calculem el producte zz'

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \\ &= rr'\big(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')\big) = \\ &= rr'\big(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\big). \end{aligned} \tag{4}$$

L'expressió (4) ens indica que en multiplicar dos complexos es multipliquen els seus mòduls i se sumen els seus arguments.
Posant $z = z'$ a (4), resulta

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

i reiterant el procés n vegades queda

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{5}$$

coneguda con la fórmula de Moivre.

Com que $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ i $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, resulta

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Ara podem estendre (4) al quocient i (5) a exponents negatius.

$$\frac{z}{z'} = z\frac{1}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi'))$$

i si $n \geq 0$, llavors

$$z^{-n} = r^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

Raons trigonomètriques d'angles múltiples.

Sigui z un complex de mòdul 1 i argument φ. Si calculem z^n mitjançant (5) i pel binomi de Newton, desenvolupem, i separem les parts real i imaginària obtenim

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi = \binom{n}{0}\cos^n\varphi + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi i\sin\varphi + \cdots + \binom{n}{n} i^n \sin^n\varphi$$

i tenint present que $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, resulta

$$\begin{aligned}\cos n\varphi &= \binom{n}{0}\cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots \pm \binom{n}{p}\cos^{n-p}\varphi\sin^p\varphi \\ \sin n\varphi &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots \pm \binom{n}{q}\cos^{n-q}\varphi\sin^q\varphi\end{aligned}$$

on si n és parell, $p = n$, $q = n-1$ i si n és imparell, $p = n-1$, $q = n$.

Per exemple per a $n = 5$, resulta:

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi \\ \sin 5\varphi &= 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi\end{aligned}$$

i d'aquestes se'n dedueix:

$$\tan 5\varphi = \frac{5\tan\varphi - 10\tan^3\varphi + \tan^5\varphi}{1 - 10\tan^2\varphi + 5\tan^4\varphi}.$$

El fet d'expressar $\cos n\varphi$ com un polinomi en $\cos\varphi$ condueix a igualtats interessants entre raons trigonomètriques amb arguments expressats mitjançant un nombre enter de graus.

Per exemple si a l'expressió anterior de $\cos 5\varphi$, escrivim les potències parelles de $\sin\varphi$ en funció de $\cos\varphi$, queda:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi(1-\cos^2\varphi) + 5\cos\varphi(1-\cos^2\varphi)^2 = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$$

posant $x = \cos\varphi$ i $p = \cos 5\varphi$ resulta l'equació

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - p = 0$$

les cinc arrels de la qual són,

$$\cos\varphi,\quad \cos(\varphi + 72°),\quad \cos(\varphi + 144°),\quad \cos(\varphi + 216°),\quad \cos(\varphi + 288°).$$

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta a l'equació polinòmica anterior, el producte de les arrels val

$$\cos\varphi\cos(\varphi + 72°)\cos(\varphi + 144°)\cos(\varphi + 216°)\cos(\varphi + 288°) = \frac{\cos 5\varphi}{16}.$$

Particularitzant per a qualsevol valor de φ i reduint els angles a l'interval $[0, 180°]$ s'obtenen curioses igualtats:
Per a $\varphi = 9° \Longrightarrow \cos 9°\cos 63°\cos 81°\cos 153° = -\dfrac{1}{16}$.
Per a $\varphi = 12° \Longrightarrow \cos 12°\cos 84°\cos 132°\cos 156° = \dfrac{1}{16}$.

NC1.–Proveu les igualtats següents:
a) $4\cos 10°\cos 50°\cos 70° = \cos 30°$.
b) $4\sin 1°\sin 59°\sin 61° = \sin 3°$.
(*Indicació:* Expresseu $\cos 3x$ en funció de $\cos x$ i utilitzeu les fórmules de Cardano-Vieta.)

NC2.–Proveu les igualtats següents:
a) $\tan 15° + \tan 75° = 4$.
b) $\tan 20° - \tan 40° + \tan 80° = 3\tan 60°$.
c) $\tan 25°\tan 35°\tan 85° = \tan 75°$.
(*Indicació:* Expresseu $\tan 3x$ en funció de $\tan x$ i utilitzeu les fórmules de Cardano-Vieta.)

Sempre és possible expressar $\cos n\varphi$ en funció únicament de $\cos\varphi$ utilitzant dos mètodes diferents: El primer consisteix a posar $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ a

$$\cos n\varphi = \binom{n}{0}\cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots \pm \binom{n}{p}\cos^{n-p}\varphi\sin^p\varphi$$

i com que totes les potències de $\sin\varphi$ són parelles s'arriba al resultat desitjat.

El segon mètode consisteix a procedir per recurrència i això ens porta a uns polinomis amb propietats interessants anomenats polinomis de Chebyshev i que no són d'altres que els que resulten d'expressar $\cos n\varphi$ en funció de $\cos\varphi$ i els designarem per T_n.

D'acord amb la notació habitual de polinomis posarem $x = \cos\varphi$ (el que suposa imposar a x la condició $-1 \leq x \leq 1$). Llavors pel que hem dit abans es pot escriure:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

D'altra banda, la igualtat trigonomètrica

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi$$

es pot escriure en termes dels T_n com

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

relació que, en principi, només és vàlida per a $-1 \leq x \leq 1$, però sent els $T_k(x)$ polinomis, ho és per a tot x.

Per tant la relació recurrent:

$$T_1(x) = x, \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

ens permet calcular els polinomis de Chebyshev.

De tot l'anterior es dedueixen algunes propietats de demostració senzilla, com és ara:

- Tots els coeficients de $T_n(x)$ són enters i el coeficient de x^n és 2^{n-1}.
- $T_n(x)$ té n arrels reals en l'interval $[-1,1]$.
- Els extrems de $T_n(x)$ a $[-1,1]$ són -1 i $+1$.

La primera és conseqüència de la relació de recurrència i les altres dues s'obtenen fàcilment a partir de les relacions $x = \cos\varphi$ i $T_n(x) = \cos n\varphi$. En efecte, com que $T_n(x)$ té grau n i $\cos n\varphi = 0$ s'anul·la pels n valors

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

de l'interval $[-1,1]$, podem factoritzar T_n en la forma

$$T_n(x) = 2^{n-1}\left(x - \cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x - \cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(x - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$$

i les dues últimes propietats són immediates.

Exercici 11: És sempre possible expressar $\sin n\varphi$ en funció exclusivament de $\sin\varphi$? (*Indicació:* Distingiu entre n parell i senar.)

Arrels n-èsimes d'un nombre complex.

Donat un complex $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ busquem tots els complexos $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ tals que $(z')^n = z$.

Utilitzant la fórmula de Moivre, resulta

$$(r')^n(\cos n\varphi' + i\sin n\varphi') = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

i com que els mòduls han de ser iguals i els arguments han de diferir en un múltiple de 2π, queda

$$r' = \sqrt[n]{r}, \qquad n\varphi' = \varphi + 2k\pi.$$

Hi ha exactament n arguments diferents, corresponents al valors $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Resumint,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Òbviament en la representació geomètrica, els afixos corresponents a les arrels n-èsimes d'un complex donat z són els vèrtexs d'un polígon regular de n costats centrat a l'origen.

Fent a la fórmula anterior $r = 1$ i $\varphi = 0$, obtenim els n complexos u_k donats per:

$$u_k = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k \ \text{ essent } \varphi_k = \frac{2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, \dots, n-1$$

que són les n arrels n-èsimes de la unitat. Sobre el pla complex es representen en els vèrtexs d'un n-àgon regular inscrit a la circumferència unitat.

L'estructura del conjunt $U_n = \{u_k \mid (u_k)^n = 1\}$ de les arrels n-èsimes de la unitat és especialment interessant degut a la següent propietat:

Si multipliquem una arrel n-èsima qualsevol z' de z per una arrel n-èsima de la unitat s'obté una altra arrel n-èsima de z.

En efecte , si $(z')^n = z$, llavors $(z'u_k)^n = (z')^n(u_k)^n = (z')^n 1 = z$.

Per tant, en multiplicar una arrel qualsevol z' per tots els elements de U_n s'obtenen totes les arrels n-èsimes de z.

En multiplicar elements de U_n el resultat pertany a U_n, en particular qualsevol potència d'un element de U_n també pertany a U_n ja que $((u_k)^p)^n = ((u_k)^n)^p = 1^p = 1$.

Arrels primitives de la unitat. Polinomis ciclotòmics

Sigui u_k un element de U_n i considerem el conjunt de les n primeres potències de u_k

$$V_k = \{u_k, u_k^2, \dots, u_k^n\}.$$

Les arrels u_k tals que $V_k = U_n$ s'anomenen arrels primitives de la unitat.

Exercici 12: Per a un n donat, proveu que u_k és arrel primitiva si i només si k i n són primers entre ells.

Si n és primer, aleshores totes les arrels n-èsimes de 1 són primitives, llevat del propi 1. Si n no és primer, el nombre d'arrels primitives coincideix amb el nombre de nombres primers amb n i més petits que n que es designa per $\varphi(n)$.

Siguin $u_1, u_2, \dots, u_{\varphi(n)}$ el conjunt de les arrels primitives per a un n donat. Definim el polinomi

$$\Phi_n(z) = (z - u_1)(z - u_2) \cdots (z - u_{\varphi(n)})$$

Aquest polinomi de grau $\varphi(n)$ s'anomena *polinomi ciclotòmic* d'ordre n i té una gran importància en el següent problema clàssic de geometria: Per a quins valors de n és possible construir amb regle i compàs un polígon regular de n costats? La resposta és que un tal polígon és constructible amb regle i compàs si i només si l'equació ciclotòmica corresponent $\Phi_n(z) = 0$ és resoluble per radicals de segon grau, és a dir si les arrels de l'equació poden expressar-se usant radicals quadràtics.[2]

Els polinomis $\Phi_n(z)$ poden calcular-se recurrentment ja que totes les arrels n-èsimes de la unitat compleixen l'equació

$$z^n - 1 = 0. \tag{6}$$

Separant l'arrel $z = 1$, queda

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1. \tag{7}$$

[2] Gauss provà als 19 anys que això és possible per als valors de n tals que els seus factors primers imparells són "primers de Fermat" diferents entre ells i només per a aquests valors. Un nombre s'anomena primer de Fermat quan és un primer del tipus: $F_k = 2^{2^k} + 1$ per a algun k. Els únics primers de Fermat que es coneixen són: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$.

Si n és primer, el polinomi (7) coincideix amb $\Phi_n(z)$, i si n no és primer cal separar-ne les arrels no primitives que estan agrupades en els polinomis $\Phi_d(z)$ per als divisors d de n. En aquest cas cal dividir el polinomi (7) pels polinomis $\Phi_d(z)$ amb d divisor de n. Els primers polinomis ciclotòmics són:

$$\begin{aligned}
\Phi_2(z) &= \frac{z^2-1}{z-1} = z+1 \\
\Phi_3(z) &= \frac{z^3-1}{z-1} = z^2+z+1 \\
\Phi_4(z) &= \frac{z^4-1}{(z-1)\Phi_2} = \frac{z^3+z^2+z+1}{z+1} = z^2+1 \\
\Phi_5(z) &= \frac{z^5-1}{z-1} = z^4+z^3+z^2+z+1 \\
\Phi_6(z) &= \frac{z^6-1}{(z-1)\Phi_2\Phi_3} = \frac{z^5+z^4+z^3+z^2+z+1}{(z+1)(z^2+z+1)} = z^2-z+1
\end{aligned}$$

NC3.–Resoleu l'equació $\Phi_5(z)=0$ i trobeu l'expressió de les quatre arrels amb radicals de segon ordre

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

Solució:
Dividint per z^2 i completant el quadrat de $z+\dfrac{1}{z}$, l'equació es pot posar en la forma:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$$

que resolent-la respecte la incògnita $z+\dfrac{1}{z}$ resulta:

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Per facilitar l'escriptura posarem $p=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ i $q=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Finalment resolent les equacions quadràtiques $z^2-pz+1=0$, $z^2-qz+1=0$ s'obtenen les quatre arrels de l'equació inicial:

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, \qquad z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i,$$

$$z_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \qquad z_4=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i.$$

Les expressions anteriors confirmen la possibilitat de construir amb regle i compàs el pentàgon regular.

L'exponencial complexa. Fórmula d'Euler.

Sembla natural preguntar-nos què significa e^z si z és un nombre complex. Si $z = a + bi$, llavors haurà de ser

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi}.$$

El primer factor és conegut en ser a un nombre real, i el problema rau a atribuir un valor i un "significat" al segon.

Sembla lògic exigir que sigui quin sigui el valor que li donem, es conservin les propietats formals de les operacions amb potències tals com:

$$(8) \qquad e^{\alpha i+\beta i} = e^{\alpha i}e^{\beta i}, \qquad e^{\alpha i-\beta i} = \frac{e^{\alpha i}}{e^{\beta i}}, \qquad \left(e^{\alpha i}\right)^k = e^{k\alpha i}.$$

Suposem que

$$e^{i\alpha} = a + bi.$$

Suposem també que la igualtat ha de subsistir en canviar i per $-i$

$$e^{-i\alpha} = a - bi.$$

Multiplicant ambdues igualtats resulta $1 = a^2 + b^2$, és a dir que $|e^{i\alpha}| = 1$.

Per tant $e^{i\alpha}$ és un complex de mòdul 1 i ha de tenir la forma $\cos\beta + i\sin\beta$.

Vegem finalment perquè sembla raonable que $\alpha = \beta$

Si $\alpha \to 0$, llavors hem d'esperar que $e^{i\alpha} \to 1$, i això exigeix que $\cos\beta \to 1$ i $\sin\beta \to 0$; és a dir, per a valors "petits" de α, els dos angles α i β han de ser molt semblants.

Si prenem $\alpha = \beta$ és immediat comprovar que es compleixen totes les propietats de (8). En efecte, les dues primeres es converteixen en les conegudes fórmules trigonomètriques del sinus i cosinus d'una suma i d'una diferència d'angles i la tercera és la fórmula de Moivre.

En definitiva podem donar la següent definició:

Definició:

$$(9) \qquad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

com una definició raonable i motivada.[3]

Si fem $\alpha = \pi$ obtenim la cèlebre igualtat

$$e^{i\pi} - 1 = 0$$

atribuïda a Euler i que relaciona els cinc nombres més "importants" del càlcul, e, i, π, 1 i 0.

Una conseqüència interessant de (9) és la següent:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha} &= \cos\alpha - i\sin\alpha \end{aligned}$$

sumant i restant resulta

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \tag{10}$$

Són múltiples els resultats que es deriven de l'aplicació a fórmules trigonomètriques de la definició (9) i la seva conseqüència (10). Vegem-ne unes quantes:

NC4.–Demostreu:

a) $\cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi$.

b) $\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$.

Solució de l'apartat a):

Per (10), tenim:

$$\begin{aligned} \cos^3\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 \iff 2^3\cos^3\varphi &= e^{3i\varphi} + 3e^{2i\varphi}e^{-i\varphi} + 3e^{i\varphi}e^{-2i\varphi} + e^{-3i\varphi} = \\ &= 3\big(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\big) + \big(e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi}\big) = 6\cos\varphi + 2\cos 3\varphi \iff \\ &\qquad \cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi. \end{aligned}$$

L'apartat b) es fa de manera anàloga.

---

[3] Existeixen més arguments de tipus heurístic per a motivar la definició (9), vegeu per exemple *Calculus* de T. M. Apostol Ed. Reverté, Volum 1 pàgina 447 o *Complex numbers & geometry* de Liang-Shin Hann editat per The Mathematical Association of America, pàgina 38. A la primera referència es fa ús de coneixements molt senzills d'equacions diferencials i a la segona s'utilitza el desenvolupament en sèrie de e^x.

Aquest problema és en certa manera el procés invers dels polinomis de Chebyshev ja que s'expressen les potències de $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ en funció d'arguments múltiples de φ.

Les expressions del tipus

$$\sum_{j=0}^{n}(a_j \cos j\varphi + b_j \sin j\varphi)$$

s'anomenen polinomis trigonomètrics.

El problema 4 es pot generalitzar a qualsevol potència $\sin^n\varphi$ o $\cos^n\varphi$ que de manera sistemàtica pot expressar-se com a polinomi trigonomètric.

NC5.–Demostreu:

a) $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cos\dfrac{nx}{2}.$

b) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\sin\dfrac{nx}{2}.$

Solució:

Posem:

$$A = 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx, \qquad B = \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx.$$

Suposant que $x \neq 2k\pi$,

$$A+iB = 1+e^{ix}+e^{i2x}+e^{i3x}+\cdots+e^{inx} = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x-1}{\cos x+i\sin x-1},$$

utilitzant les identitats $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ i $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ i operant, queda

$$A+iB = \frac{-2\sin^2\dfrac{(n+1)x}{2}+2i\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{(n+1)x}{2}}{-2\sin^2\dfrac{x}{2}+2i\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\dfrac{(n+1)x}{2}+i\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}+i\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Multiplicant pel conjugat de l'últim denominador, resulta

$$A+iB = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\left(\cos\frac{(n+1)x}{2} + i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - i\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} e^{\frac{(n+1)x}{2}-\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} e^{\frac{nx}{2}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

Igualant les parts real i imaginària s'obté el resultat.

El punt de vista geomètric.

A continuació volem interpretar les operacions definides en els complexos des del punt de vista de la seva representació gràfica en l'anomenat pla complex (o d'Argand).

Siguin $u = a+ib$, $z = x+iy$ dos complexos d'afixos P i Q respectivament. Sigui R l'afix de $u+z$. Tenim $u+z = a+x+(b+y)i$ que en el pla complex representa una translació de vector (a,b) com es mostra clarament a la figura de la dreta. Totes les propietats algebraiques de la suma de complexos es corresponen amb les mateixes propietats de la suma de vectors lliures en el pla.

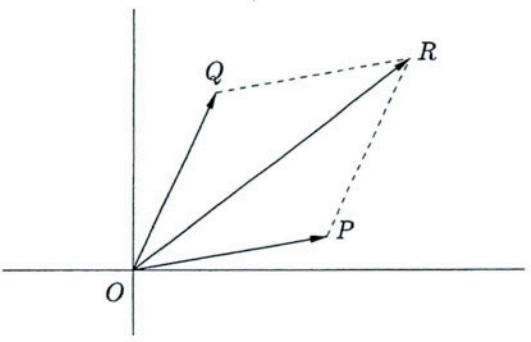

Figura 2

Per veure la imatge gràfica del producte posem

$$\alpha = \arg(u), \qquad \beta = \arg(z)$$

i designem per A i R els afixos de 1 i zu respectivament.

Com que $\arg(zu) = \alpha+\beta$ i $|zu| = |z||u|$, els triangles OAP i OQR són semblants amb raó de semblança (Figura 3)

$$r = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{|z|}{|u|}.$$

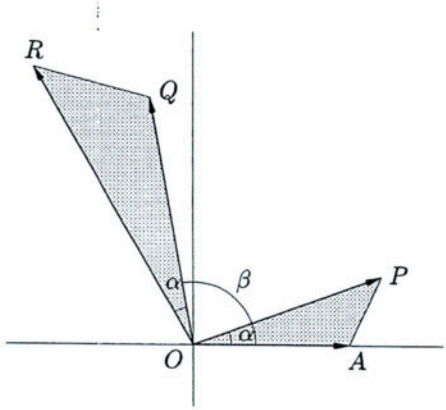

Figura 3

Si fixem u, el pas de Q a R consisteix en un gir d'angle α i centre O seguit d'una homotècia de centre O i raó r. Les dues transformacions (gir i homotècia) commuten i la transformació resultant és una semblança directa que a vegades s'anomena, d'una manera més descriptiva, rotació dilativa de centre O, amplitud α i raó r.

És interessant destacar-ne alguns casos particulars

- Si u és real, llavors $\alpha = 0$ i la transformació és l'homotècia de raó a.
- Si $|u| = 1$, llavors la transformació es redueix a un gir d'amplitud α. En particular un gir de 90° entorn l'origen equival a multiplicar per i.
- Si $u = -1$, la transformació és una simetria central entorn a O.[4]

[4] Aquí es pot fer una petita digressió sobre per què es representen els complexos en un pla cartesià utilitzant l'eix OY per als imaginaris purs. Si interpretem en la recta real el producte de dos reals, un fix a i un altre variable b, el producte ab és la imatge de b en l'homotècia (o dilatació) de raó a. En particular el propi a és la imatge de 1 en la dilatació que defineix a. En general podem preguntar-nos per la transformació "arrel" d'una transformació donada com aquella que multiplicada per si mateixa (aplicada dues vegades en el sentit de la composició de funcions) coincideix amb la transformació inicial. Per exemple, si $a > 0$, la transformació "arrel" és qualsevol de les dilatacions definides per $\pm\sqrt{a}$. Per a $a = -1$, la transformació és un gir de 180° entorn l'origen, la seva transformació "arrel"és en aquest cas un gir de 90° amb el mateix centre de gir i que porta l'afix de 1 al punt $(0,1)$ que representa la imatge de $i = \sqrt{-1}$.

Aquesta relació estreta entre transformacions geomètriques i operacions amb complexos fa que, de vegades, un problema de plantejament purament geomètric es resolgui elegantment interpretant-lo al pla complex. Vegem-ne un exemple, amb un problema clàssic.

NC6.–*El plànol del tresor.* Disposem d'un plànol per a trobar un tresor amb les següents instruccions:

En el paratge on és el tresor hi ha un pi P i un avet A. Si traslladem tot el terreny (amb el tresor inclòs) de manera que P ocupi la posició de A, a continuació girem 90° amb centre P i sentit contrari al de les agulles del rellotge i finalment girem uns altres 90° amb centre A i en el mateix sentit, el tresor és en el mateix lloc del començament. Trobeu el tresor.

Solució: Clarament hem de trobar un punt que quedi invariant després de fer les tres transformacions descrites a l'enunciat (una translació i dos girs).

Es pot resoldre geomètricament estudiant la transformació producte però és molt més ràpid resoldre-ho en el pla complex.

En una referència amb origen a P, eix real positiu en la direcció PA i unitat $\frac{1}{2}PA$, sigui z un complex qualsevol. Anem a veure qui és el transformat de z en aplicar-li les tres transformacions de l'enunciat.

Translació de vector $\overrightarrow{PA}$: $z \to z+2$.
Gir de centre P i amplitud 90° (multiplicar per i): $z+2 \to (z+2)i$.
Per poder aplicar més fàcilment el segon gir, traslladem l'origen al punt A: $(z+2)i \to (z+2)i-2$
Gir de centre A i amplitud 90° (multiplicar per i): $(z+2)i-2 \to \big((z+2)i-2\big)i$
Ara hem de tornar a dur l'origen al punt P: $\big((z+2)i-2\big)i \to \big((z+2)i-2\big)i+2$
Per tal que z sigui invariant per a aquesta successió de moviments, ha de complir:

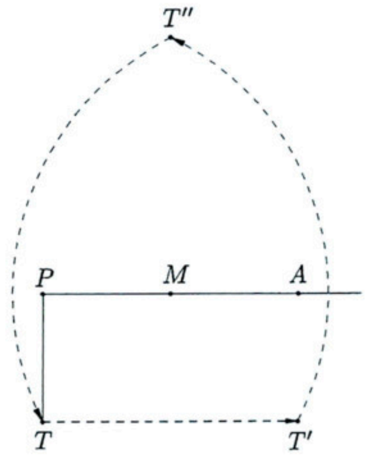

Figura 4

$$\big((z+2)i-2\big)i+2=z$$

equació que té una única solució que és $z=-i$.

La construcció de la solució és immediata, només cal girar $-90°$ amb centre P el punt M que és el punt mitjà del segment PA per trobar la posició del tresor T.

A la figura s'ha comprovat la solució aplicant a T els tres moviments de l'enunciat i observant que es torna al mateix punt.

La conjugació s'interpreta en el pla complex com una simetria axial respecte de l'eix real. La relació entre els afixos de z i $\frac{1}{z}$ s'obté fàcilment amb la igualtat:

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

d'on $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=\arg(\bar{z})=-\arg(z)$.

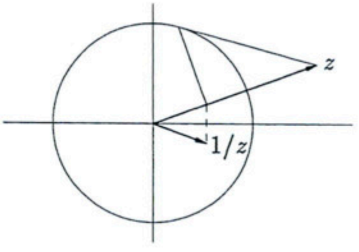

Figura 5

Com que a més a més $\left|\frac{1}{z}\right||z|=1$, resulta que l'afix de $\frac{1}{z}$ s'obté a partir de l'afix de z mitjantçant una inversió respecte del cercle unitat seguida d'una simetria respecte l'eix real. La construcció geomètrica de l'afix de l'invers es mostra a la figura 5 en el cas que $|z|>1$, si $|z|<1$ es pot invertir el procés ja que l'invers de l'invers de z és el propi z. Si $|z|=1$, llavors l'invers coincideix amb el conjugat.

De manera més general la inversió de pol l'origen i potència $k>0$ equival a la transformació:

$$z\to\frac{k}{\bar{z}}.$$

Exercici 13: Proveu que si z és un complex no nul, llavors els afixos de z, $-z$, $\frac{1}{z}$, i $-\frac{1}{z}$ estan alineats.

Alguns llocs geomètrics i relacions freqüents en geometria tenen expressions clares en el pla complex, com per exemple:

- El punt mitjà dels afixos A, B de z, z' és l'afix M del complex $\dfrac{z+z'}{2}$.
- La circumferència de centre A, afix del complex a, i radi r (real positiu), és $|z-a|=r$.
- El lloc geomètric dels punts tals que la raó entre les distàncies a dos punts donats A, B és el nombre real $\lambda > 0$. Si a i b són els complexos que tenen per afixos A i B, el lloc demanat és $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = \lambda$. Pot comprovar-se com exercici que es tracta d'una circumferència que té el centre alineat amb A i B. És l'anomenat cercle d'Apoloni (vegeu el problema 40 del final del capítol).
- El baricentre del triangle de vèrtexs els afixos dels complexos z_1, z_2, z_3 és l'afix de $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

NC7.–Siguin z i z' complexos amb afixos A i B respectivament. Mantinguem z' fix.

a) Quin és el lloc geomètric de A per tal que els afixos de z, z' i zz' estiguin alineats?

b) Quin és el lloc geomètric de l'afix de zz'?

Solució: Siguin P l'afix de zz' i Q l'afix de 1.

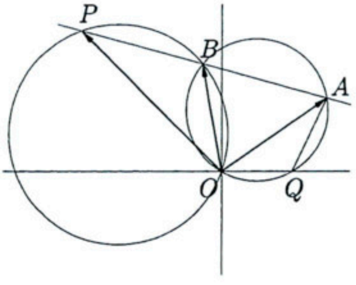

Figura 6

a) Sabem que els triangles OQA i OBP són semblants. Per tant

$$\angle OQA = \angle OBP$$

però $\angle OBA$ és suplementari de $\angle OBP$ en ser A, B i P punts alineats.
En conseqüència

$$\angle OQA + \angle OBA = 180°$$

és a dir el quadrilàter $OQAB$ és inscriptible. Com que O, Q i B són fixos, A ha d'estar en el circumcentre del triangle OQB.
b) Quan A es mou en la circumferència OQB, $\angle OAQ$ és constant i per la semblança anterior, $\angle OPB$ també és constant, per tant P està en l'arc capaç d'angle $\angle OAQ$ sobre el segment OB.

Polígons regulars i nombres complexos

Com ja s'ha vist anteriorment, els afixos de les arrels n-èsimes de la unitat formen un polígon regular de n costats inscrit en la circumferència unitat i amb un vèrtex a $(1,0)$. Algunes propietats mètriques curioses d'aquests polígons poden establir-se amb força facilitat utilitzant les propietats dels nombres complexos i dels polinomis.
El conjunt $U_n = \{u_k \mid (u_k)^n = 1; k = 0,1,\dots,n-1\}$ de les arrels n-èsimes de la unitat té n elements donats per:

$$u_k = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k \quad \text{essent } \varphi_k = \frac{2k\pi}{2},\ k = 0,1,\dots,n-1$$

i qualsevol d'ells és arrel del polinomi

$$P_n(z) = z^n - 1 = (z-1)\big(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1\big)$$

en conseqüència qualsevol arrel z diferent de 1 compleix

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$$

i aplicant les fórmules de Cardano-Vieta a l'equació $z^n - 1 = 0$, resulta

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = 0.$$

NC8.–Siguin A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 vèrtexs consecutius d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 1. Proveu que les cordes A_0A_1 i A_0A_2 compleixen

$$\left(\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}\right)^2 = 5.$$

Solució 1: Siguin u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 les arrels cinquenes de la unitat i A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 els seus afixos.

Com que $u_0 = 1$, tenim

$$\overline{A_0A_1} = |u_1 - 1|, \qquad \overline{A_0A_2} = |u_2 - 1|$$

llavors

$$\left(\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}\right)^2 = |u_1 - 1|^2 |u_2 - 1|^2 = \left|\left[(u_1 - 1)(u_2 - 1)\right]^2\right|$$

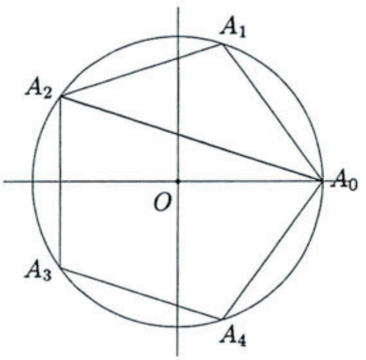

Figura 7

efectuant el producte $\left[(u_1 - 1)(u_2 - 1)\right]^2$ i tenint present que

$$u_j u_k = u_h \ \text{ amb } \ h = j + k \ (\text{mod } 5)$$

resulta

$$\left[(u_1 - 1)(u_2 - 1)\right]^2 = (u_3 - u_1 - u_2 + 1)^2 = -u_4 + 4u_3 - u_2 + u_1 - 1$$

però

$$1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \Longleftrightarrow u_3 = -1 - u_1 - u_2 - u_4$$

i substituint queda

$$\left(\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}\right)^2 = \left[(u_1 - 1)(u_2 - 1)\right]^2 = |5u_3| = 5|u_3| = 5.$$

Solució 2:

$$P(z) = (z - u_1)(z - u_2)(z - u_3)(z - u_4) = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

fent $z = 1$ resulta $P(1) = 5$.

Però $\overline{A_0A_1} = \overline{A_0A_4}$ i $\overline{A_0A_2} = \overline{A_0A_3}$, per tant $\left(\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2}\right)^2 = \overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3} \cdot \overline{A_0A_4}$ i finalment

$$\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3} \cdot \overline{A_0A_4} = (1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)(1-u_4) = P(1) = 5.$$

Per descomptat que també es pot resoldre el problema sense utilitzar complexos i no és difícil, però aquesta solució és breu i fàcilment generalitzable (vegeu el problema 32 al final del capítol).

NC9.–Donat un polígon regular de n costats inscrit al cercle unitat de vèrtexs A_0, A_1, $\ldots, A_{n-1}$, es considera un punt P qualsevol de la circumferència circumscrita. Demostreu que la suma dels quadrats de les distàncies de P a cada vèrtex val $2n$ independentment de la posició de P.

Solució: A la figura 8 es representa la situació per a 7 costats encara que el raonament es fa en general. Suposem, sense perdre generalitat, que P és a l'arc $A_{n-1}A_0$.

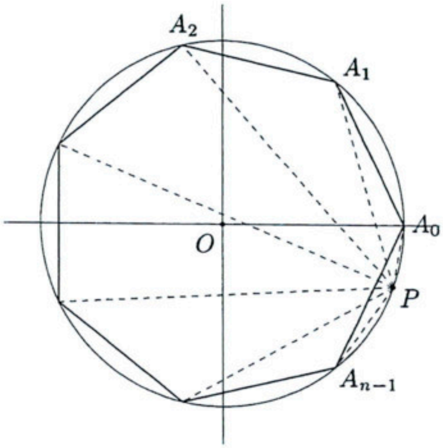

Figura 8

Posem $\alpha = \angle POA_0$ i $\beta = \dfrac{2\pi}{n}$. Sabem que la longitud l d'una corda d'angle central x en una circumferència de radi 1, val

$$l = 2\sin\frac{x}{2}.$$

Per tant, l'expressió que hem d'avaluar és

$$S = \overline{PA}_0^2 + \overline{PA}_1^2 + \overline{PA}_2^2 + \cdots + \overline{PA}_{n-1}^2$$

que segons la igualtat anterior val

$$S = 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{2}\right) + \cdots + \sin^2\left(\frac{\alpha+(n-1)\beta}{2}\right)\right)$$

utilitzant la igualtat $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ queda

$$\begin{aligned} S &= 4\Big(\frac{n}{2} - \big(\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+(n-1)\beta)\big)\Big) = \\ &= 2n - 4\big(\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+(n-1)\beta)\big). \end{aligned}$$

Només queda per veure que l'últim parèntesi és nul.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha+k\beta) = \cos\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\beta - \sin\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\sin k\beta$$

i segons el que s'ha provat en el problema 5 resulta

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha+k\beta) = \cos\alpha\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos\frac{(n-1)\beta}{2} - \sin\alpha\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin\frac{(n-1)\beta}{2} = 0$$

ja que en els dos sumands hi ha el factor $\sin\dfrac{n\beta}{2} = \sin\dfrac{2n\pi}{2n} = \sin\pi = 0$.

Problemes suplementaris.

NC10.–Proveu que tot complex z de mòdul 1 amb $z \neq -1$ pot escriure's en la forma $\dfrac{1+ia}{1-ia}$ amb $a \in \mathbb{R}$.

NC11.–Siguin a, b complexos, amb afixos A i B respectivament. Trobeu el lloc geomètric de l'afix Z del complex z tal que

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k > 0.$$

NC12.–Donats n i m naturals, determineu el complex z tal que z^n i z^m són conjugats.

NC13.–Demostreu:

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx = \dfrac{\sin(n+1)x \cos nx}{2\sin x} + \dfrac{n-1}{2}$.

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \cdots + \sin^2 nx = \dfrac{n+1}{2} - \dfrac{\sin(n+1)x \cos nx}{2\sin x}$.

NC14.–Els punts $A(a, 11)$ i $B(b, 37)$ determinen juntament amb l'origen de coordenades un triangle equilàter. Determineu el producte ab.

NC15.–Es considera en el pla complex la funció $f(z) = -\dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$. Si P és l'afix de z i Q el de $f(z)$, es demana:

a) Proveu que existeixen dos punts fixos de f, és a dir, complexos z tals que $f(z) = z$.

b) Siguin A i B els afixos dels punts trobats en l'apartat anterior. Proveu que per a tot $z \neq 0$, P, Q, A i B són concíclics.

NC16.–Proveu que $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$ implica $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$.

NC17.–Si a és una arrel setena de la unitat diferent de 1, calculeu el valor de

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{a^2}{1+a^4} + \frac{a^3}{1+a^6}.$$

NC18.–Determineu tots els complexos z tals que $2z = z_1 + z_2$, on z_1 i z_2 són dues arrels cúbiques diferents de z.

NC19.–Proveu les següents igualtats:

a) $\dbinom{n}{0} - \dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{4} - \cdots = (\sqrt{2})^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$.

b) $\dbinom{n}{1} - \dbinom{n}{3} + \dbinom{n}{5} - \cdots = (\sqrt{2})^n \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

NC20.–Trobeu els mínims valors de m i n enters positius tals que

$$(1 + \sqrt{3}i)^m = (1-i)^n.$$

NC21.–El complex z compleix $z + \bar{z} = |z|^2$ i k és un nombre real amb $0 < k < 1$. Quin és el lloc geomètric de l'afix de $z + k\bar{z}$?

NC22.–Representeu en el pla els afixos dels complexos que compleixen:

a) $z - \bar{z} = i$.

b) $|z - i| = |z + i|$.

c) $|2z + 3| < 1$.

d) $|z + 1| < |z - 1|$.

e) $|z| < |2z + 1|$.

NC23.–Proveu que si $z = x + iy$ amb $y > 0$, llavors $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| < 1$.

NC24.–Trobeu tots els complexos que compleixen $\bar{z} = z^3$.

NC25.–En el pla complex $2+i$ és el centre d'un quadrat i $5+5i$ n'és un vèrtex, Calculeu-ne els altres vèrtexs.

NC26.–Si z, z' són nombres complexos, demostreu que si $|z + z'| = |z - z'|$,aleshores $\dfrac{iz}{z'}$ és real.

NC27.–Es consideren en el pla els conjunts de nombres complexos

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg\left(z - (2 + 3i)\right) = \frac{\pi}{4} \right\}, \qquad B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - (2 + i)| < 2 \right\}.$$

Trobeu la projecció ortogonal sobre l'eix real de $A \cap B$.

NC28.–Demostreu que l'equació $z^4 + 4(1 + i)z + 1 = 0$ té una arrel a cada quadrant del pla complex.

NC29.–Donades les equacions amb coeficients complexos

$$x^2 - sx + p = 0, \qquad x^2 - s'x + p' = 0,$$

trobeu les condicions que han de complir els coeficients per tal que les arrels siguin els vèrtexs d'un quadrat essent les de cada equació vèrtexs oposats.

NC30.–Definim la successió de nombres complexos $\{a_n\}$, $n > 1$, per

$$a_n = (1+i)\Big(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\Big)\cdots\Big(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\Big)$$

Estudieu si existeix un nombre natural m tal que

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 1990.$$

NC31.–Trobeu les condicions que han de complir a i b reals per tal que el sistema

$$\begin{cases} \cos x \;+\; \cos y \;=\; a \\ \sin x \;+\; \sin y \;=\; b \end{cases}$$

admeti solució a $\mathbb{R}$. Resoleu-lo i doneu les expressions de x i y en funció de a i b. (*Indicació:* És una generalització del problema 33.)

NC32.–Siguin A_0, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ vèrtexs consecutius d'un n-àgon regular inscrit en una circumferència de radi 1. Proveu que les cordes A_0A_1, $A_0A_2, \ldots, A_0A_{n-1}$ compleixen:

$$\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdots \overline{A_0A_{n-1}} = n.$$

NC33.–Sigui z un complex no nul tal que $z + \dfrac{1}{z} = 1$. Calculeu $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

NC34.–Sigui z un complex no nul.

a) Proveu que

$$2\Big|z+\frac{1}{z}\Big| = |z-i|\Big|i-\frac{1}{z}\Big| + \Big|i+\frac{1}{z}\Big||z+i|.$$

b) Proveu que els afixos de z, $-\dfrac{1}{z}$, i, $-i$ són concíclics.

NC35.–Trobeu les condicions que han de complir a i b reals per tal que el sistema

$$\begin{cases} 2\cos x \;+\; 3\cos y \;=\; a \\ 2\sin x \;+\; 3\sin y \;=\; b \end{cases}$$

admeti solucions a $\mathbb{R}$. Resoleu-lo donant les expressions de x i y en funció de a i b.
(*Indicació:* És una generalització del problema 33.)

NC36.–Si z és una arrel n-èsima de la unitat, trobeu tots els possibles valors de

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^{n-1}}.$$

NC37.–Donat un polígon regular de n costats inscrit en el cercle unitat i de vèrtexs A_0, A_1, ... , A_{n-1}, es considera un punt P qualsevol del pla. Demostreu que la suma dels quadrats de les distàncies de P a cada vèrtex només depèn de la distància d de P al centre de la circumferència.
(*Indicació:* És una extensió del problema 11.)

NC38.–El mateix enunciat del problema anterior però traient la restricció que P pertany al pla del polígon.

NC39.–Proveu que els afixos dels complexos u, v, w formen un triangle equilàter si i només si

$$u^2+v^2+w^2=uv+uw+vw.$$

NC40.–Siguin a i λ nombres reals positius, α un nombre real de l'interval $[0,2\pi)$, Discutiu el sistema

$$\left\{\begin{array}{l}\left|\dfrac{z-ai}{z-a}\right|=\lambda\\ \arg(z)=\alpha\end{array}\right.$$

en el camp complex.

Mostra de solucions.

Solució del problema 18: Anomenen z_3 la tercera arrel cúbica de z. Com que z_1, z_2 i z_3 són arrels de l'equació $x^3-z=0$, per les fórmules de Cardano-Vieta sabem que

$$z_1+z_2+z_3=0\Longleftrightarrow z_1+z_2=-z_3$$

llavors, l'equació inicial queda

$$2z = -z_3$$

elevant al cub i operant resulta

$$8z^3 = -z \Longleftrightarrow z(8z^2 + 1) = 0$$

equació que té les tres solucions

$$z = 0, \qquad z = \frac{\sqrt{2}}{4}i, \qquad z = -\frac{\sqrt{2}}{4}i.$$

Solució del problema 31: Multiplicant la segona equació per i i sumant queda $z_1 + z_2 = z$ on $z_1 = \cos x + i \sin x$, $z_2 = \cos y + i \sin y$, $z = a + bi$.

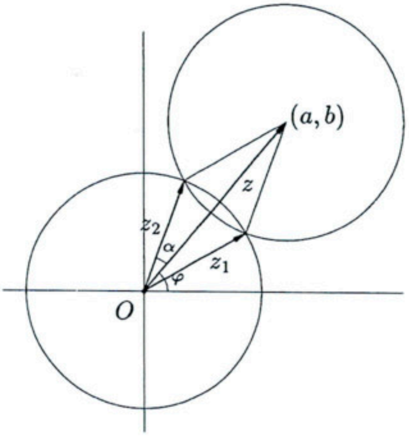

Figura 9

El sistema queda reduït a l'equació en nombres complexos $z_1 + z_2 = z$ sent z_1 i z_2 les incògnites amb la condició $|z_1| = |z_2| = 1$.
El sistema tindrà solució si i només si es pot construir un triangle de costats 1, 1 i $\sqrt{a^2 + b^2}$. Per tant la condició és

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq 2.$$

La solució és (vegeu la figura)

$$z_1 = \cos(\varphi - \alpha) + i \sin(\varphi - \alpha)$$
$$z_2 = \cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)$$

on $\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{b}{a} = \arccos\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big)$.
Llavors la solució del sistema inicial és

$$x = \arctan \frac{b}{a} - \arccos\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big) + 2k\pi$$
$$y = \arctan \frac{b}{a} + \arccos\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big) + 2k\pi.$$

Bibliografia:

Calculus, de T. M. Apostol, Ed. Reverté

Àlgebra moderna, de G. Birkhoff i S. McLane, Ed. Vicens Vives

Calculus. Calculo infinitesimal, de Michael Spivak, Ed. Reverté

Fundamentos de geometria, H. S. M. Coxeter, Ed. Limusa-Wiley

Álgebra básica, de Michel Queysanne, Ed. Vicens Vives

Complex numbers & Geometry, de Liang-shin Hann, editado por The Mathematical Association of America